**Examen Parcial de Análisis de Variable Compleja**
**Cuarto curso de Matemáticas**
**10 de junio de 2003**

1. Sea $\Omega$ un abierto no vacío con la propiedad de que toda función holomorfa en $\Omega$ que no toma el valor cero admite una raíz cúbica holomorfa. Probar que $\Omega$ es homológicamente conexo.

2. Integrando la función $z \mapsto \dfrac{z^{1/2}}{z^4+1}$ a lo largo de la frontera de la parte del anillo $A(0;\varepsilon,R)$ $(0<\varepsilon<1<R)$ contenida en el primer cuadrante, calcular el valor de la integral
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^4}\,dx$$

3. Encontrar todas las aplicaciones biyectivas y biholomorfas (isomorfismos conformes) que aplican la banda horizontal $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Im}(z) < \pi/2\}$ en el disco unidad $D(0,1)$.

4. Sea $f$ una función holomorfa en un abierto $\Omega$ y sea $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$ verificándose que la imagen por $f$ de la circunferencia $C(a,r)$ está contenida en el disco $D(a,r)$. Usando el Teorema de Rouché probar que $f$ tiene un único punto fijo en $D(a,r)$.

5. Calcúlese el número de ceros del polinomio
$$P(z) = 2z^6 - z^3 + 4z + 1$$
en el semiplano de la derecha.

6. Teorema de los residuos.

Observaciones:
Los alumnos del grupo A deben hacer los ejercicios 1, 3, 4 y el tema teórico.
Los alumnos del grupo B deben hacer los ejercicios 2, 3, 4, 5 y el tema teórico.